接触幾何学に現れる特異点について(C$^\infty$-写像の特異点と接触幾何学)

山口, 桂三

数理解析研究所講究録
619巻 1987年 97-113

接触幾何学に現われる特異点について

北大・理　山口佳三
(Keizo Yamaguchi)

接触幾何学≒一階一未知函数偏微分方程式論 なる図式において、*Legendre* 特異点は、独立変数を指定した時の、解に現われる特異点である。接触幾何学に現われる特異点の他の例として、ここでは、方程式に現われる"特異点"について論じたい。内容は、V. V. *Lychagin* の次の論文の紹介である。

[L] *Local classification of non-linear first order partial differential equations*
Russian Math. Surveys 30:1 (1975) 105-175

詳細は原論文を読んで頂くことにして、ここでは、問題の背景と概略を述べる。

0. 古典的一階偏微分方程式論

M を n 次元 C^∞-多様体。$J^1(M;\mathbb{R})$ を M 上の実数値函数の 1-*jets* の空間とする。$J^1(M,\mathbb{R})$ は canonical に $T^*(M)\times\mathbb{R}$ と同一視される。このとき $\hat{\alpha} = du - \alpha$ は $J^1(M,\mathbb{R})$ 上の接触構造

$$C = \{\hat{\alpha} = 0\} \subset T(J^1(M,\mathbb{R}))$$

を定める。ここに α は $T^*(M)$ 上の canonical 1-*form* である。

定義と用語：(i) $J^1(M,\mathbb{R})$ の部分多様体 R を M 上の函数に対する一階(非線型)偏微分方程式系と考える。

(ii) $J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ の解 $f \in C^\infty(M) \iff j^1(f) ; M \to J^1(M, \mathbb{R})$: graph の像が R に含まれる。

$S = j^1(f)(M)$ は、このとき、接触多様体 $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ の Legendre 部分多様体である。以下では、$S \subset R$ なる Legendre 部分多様体 S をすべて R の解と呼ぶ。

(iii) π を $\hat{\pi}$ の R への制限とする。さらに、$^\forall x \in R$ で、$T_x(R)$ の部分空間 $D(x)$ を次で定める。

$$D(x) = \{ X \in T_x(R) \mid \pi(X) = 0 \} = T_x(R) \cap C(x)$$

(iv) $J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$ が包合系である。$\iff$ $^\forall x \in R$ において $T_x(R)$ は $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ の Legendre 部分空間 (i.e. $(C(x), d\hat{\pi})$ の Lagrangean 部分空間) を含んでいる。

((これは、方程式系 R に対する compatibility condition である))

このとき、古典的一階偏微分方程式論の内容は、次の2つから成ると考えられる。

Regular な包合系 R (i.e. $D \subset T(R)$ が部分束) に対して

(A) 接触同値問題 (接触多様体の部分多様体論)

$^\forall x \in R$ の近傍に $(J^1(M, \mathbb{R}), C)$ の正準座標 $(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ がとれて、$R = \{ p_1 = \cdots = p_r = 0 \}$ となる。ここに、正準座標とは $C = \{ du - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0 \}$ となる $J^1(M, \mathbb{R})$ の座標。

いいかえれば、regular な包合系 R は、局所的には常に、接触変換によって、R の次元のみによって定

まる標準的な線型方程式系に移される。従って次元の等しい包合系(regular な)はすべて局所接触同値である。

(B) 求積論

上のような正準座標を、いかにして求めるか? この部分は、いわゆる特性系の理論であり、x^i, u^i, p_i は常微分方程式を解いて得られる。

以上の内容については、上記、Lychagin の論文の前半ないし次を参考にされたい。

大島・小松 著　一階偏微分方程式　岩波基礎数学

我々は、以下において、包合系 R が regular でない場合に主として (A) の問題を論じたい。すなわち、R は $J^1(M,\mathbb{R})$ の部分多様体として、D の特異点を考察する。

1. 包合系の特異点と Hessian

包合系 $R \subset J^1(M,\mathbb{R})$ に対して

$$x \in R \text{ が特異点} \iff \Pi_x = 0 \quad (\text{i.e., } D(x) = T_x(R))$$

と定める。特に R の余次元が 1 であるとき、

$$x \in R \text{ が特異点} \iff T_x(R) = C(x)$$

である。従って、この場合、x を原点とする $J^1(M,\mathbb{R})$ の正準座標 $(x_1,\cdots,x_n, u, p_1,\cdots,p_n)$ をとると、x の近傍で、

$$R = \{ u = f(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n) \}$$

と書かれる。$\pi = df - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ であるから、このとき、xは函数fの特異点である。我々は、特異点xの近傍でのRの様子を接触同値の下で調べたい。

◎ 特異点における *Hessian*

Rの特異点xは R上πの特異点であるから、xでのRの *Hessian* h_π を次で定める。

$$\begin{aligned} h_\pi : T_x(R) \times T_x(R) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto v_1(\pi(Y)) \end{aligned}$$

ここに、Yは$Y_x = v_2$なるR上のベクトル場である。これが *well-defined* なることは、通常の函数fの特異点での *Hessian* の場合(いわば$\pi = df$の場合)と同様であり、次も容易にわかる。

$$h_\pi(v_1, v_2) - h_\pi(v_2, v_1) = d\pi(v_1, v_2)$$

簡単のため以下、Rの余次元は1とする。このとき、$T_x(R) = C(x)$であり、$d\pi$は$T_x(R)$の *symplectic* 形式$\langle\ ,\ \rangle$を定める。従って *Hessian* h_πは$\langle\ ,\ \rangle$を用いて$T_x(R)$の線型変換H_xとして表現できる。

$$H_x : T_x(R) \to T_x(R) : \text{線型変換}$$

$$\langle H_x(v_1), v_2 \rangle = h_\pi(v_1, v_2)$$

このとき、H_xは次を満たしている。

$$\langle H_x(v_1), v_2 \rangle - \langle H_x(v_2), v_1 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

明らかに、接触変換φは、包合系の特異点を特異点に移し、その微分φ_*は、$(T_x(R), \langle , \rangle)$に対しては conformal symplectic な変換として働く。さらにφ_*はH_xと可換である。H_xは接触変換の下で包合系の特異点を分類しようとするとき、最初の目安となる。

従って、我々の最初の課題は、symplectic ベクトル空間$(V, \langle , \rangle)$において、$\langle H(v_1), v_2 \rangle + \langle v_1, H(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$を満たす$H: V \to V$を$Csp(V)$の下で分類することである。この部分については、[L] Chapter III, §2 を参照されたい。

2. 単独方程式の場合への帰着

接触多様体$(J^1(M, \mathbb{R}), C)$において、函数$f \in C^\infty(J^1(M, \mathbb{R}))$は、$J^1(M, \mathbb{R})$上の無限小接触変換$X_f$を次で定める；

$$\begin{cases} \hat{\pi}(X_f) = f \\ X_f \rfloor d\hat{\pi} \equiv -df \pmod{\hat{\pi}} \end{cases}$$

$J^1(M, \mathbb{R}) \supset R$を余次元$r$の包合系として、$x$を$R$の特異点とする。適当な函数$f$を用いて、$x$の近傍で$R$を1次元ふくらませて、余次元$r-1$の regular な包合系$Q$が、局所的に次のようにして作られる：$f \in C^\infty(J^1(M, \mathbb{R}))$を$f(x) \neq 0$なる函数とする。さすれば、$(X_f)_x \notin C(x)$であり、従って、

$(X_f)_x \notin T_x(R)$ である。X_f の生成する 1-parameter 接触変換群を Φ_t とすると

$$\begin{aligned}\Psi : R \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow J^1(M.\mathbb{R}) \\ (y, t) &\longmapsto \Psi(y, t) = \Phi_t(y)\end{aligned}$$

は、$(x, 0)$ の近傍 $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ で埋め込みとなる。このとき、$Q = \Psi(U \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ は、regular な余次元 $r-1$ の包合系であり、U を余次元 1 の部分多様体として含んでいる。

従って、0. での結果より、x の近傍で、x を原点とする正準座標 $(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ がとれて、

$$Q = \{ p_1 = \cdots = p_{r-1} = 0 \}$$

となる。x は R の特異点であるから、$T_x(R) \subset C(x) = \{ du - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0 \}$ よって、x の近傍で、

$$R = \{ p_1 = \cdots = p_{r-1} = u - f(x, p) = 0 \}$$

と書ける。さらに、この正準座標で、$X_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}$ である。また、R は包合系であるから、$X_{p_1}, \cdots, X_{p_{r-1}}$ は R に接している。従って、$f = f(x_r, \cdots, x_n, p_r, \cdots, p_n)$ である。よって次を得た。

命題 1 ([L] Chap. III §3 p.150)

$J^1(M.\mathbb{R}) \supset R$ を余次元 r の包合系とする。$x \in R$ を特異点とするとき、x を原点とする $J^1(M.\mathbb{R})$ の正準座標 $(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ と函数 f が存在して、R は x の近傍で、

$$R = \{ p_1 = \cdots = p_{r-1} = u - f(x_r, \cdots, x_n, p_r, \cdots, p_n) = 0 \}$$

と書ける。

命題1により包合系 R の特異点の近傍での様子は、余次元1の場合を調べればよい。余次元1の場合、R は特異点 x の近傍で、x を原点とする正準座標で、

$$R = \{ u = f(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n) \}$$

と書かれる。我々の問題は、函数 f の標準形を求めることになる。

3. 標準形

この節では、余次元1の包合系 R の特異点 x において、Hessianが f の x での 2-jet を定めている様子を見る。

◎ Hessianの標準形

Symplectic ベクトル空間 $(V, \langle\,,\,\rangle)$ において、

$$\langle H(v_1), v_2 \rangle + \langle v_1, H(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

を満たす線型変換 $H : V \to V$ は、次のように分類される。

（概略、H の分類は、H を Jordan 行列として表わす、V の基底を、$\langle\,,\,\rangle$ に関する直交関係を、どう満たすように取れるかで与えられる。）

まず、H の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$1-\lambda$ も常に固有値となる。従って V は、$\langle\,,\,\rangle$ の下、次の形に直交分解される：

$$V = \bigoplus_{\lambda, j} E_{\lambda, j}$$

ここに、$E_{\lambda, j}$ は固有値の組 $(\lambda, \bar{\lambda}, 1-\lambda, 1-\bar{\lambda})$ に対して定まる

H - 不変部分空間である。$\left(\bigoplus_j E_{\lambda,j}\right)^{\mathbb{C}}$ は、固有値 $\lambda, \bar{\lambda}, 1-\lambda, 1-\bar{\lambda}$ の広義固有空間の直和に一致する。$E_{\lambda,j}$ において、H を Jordan 行列として表わす基底の取り方は、次の 6 通りに分かれる。

(1) $\lambda \in \mathbb{R}$ & $\lambda \neq \frac{1}{2}$

(2) $\lambda = a + ib \quad (a \neq \frac{1}{2},\ b \neq 0)$

(3) $\lambda = \frac{1}{2} + i\mu$ & $\dim E_{\lambda,j} = 2n_j \ : n_j : \text{even}$

$(\mu \neq 0)$

(4) $\lambda = \frac{1}{2} + i\mu$ & $\dim E_{\lambda,j} = 2n_j \ : n_j : \text{odd}$

(5) $\lambda = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} (a) \\ (b) \end{cases}$

各場合についての標準形の詳細は [L] p.143 参照のこと。ここでは、(1) の標準形のみ与えておく。

$\lambda \in \mathbb{R}$ & $\lambda \neq \frac{1}{2}$ のとき

$E_{\lambda,j}$ には、$\langle v_r, v_s \rangle = \langle w_r, w_s \rangle = 0$, $\langle v_r, w_s \rangle = (-1)^{r+1}\delta_{r, n_j - s}$ を満たす基底 $\{v_1, \cdots, v_{n_j}, w_1, \cdots, w_{n_j}\}$ が存在して、H はこの基底によって、次の形の行列で表わされる。

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1-\lambda & 1 & & 0 \\ & 1-\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1-\lambda \end{matrix} \end{array}\right)$$

◎ 方程式の標準形　　◎注意：単独方程式は常に包含系である。

R を余次元 1 の包含系[◎]とし、x を R の特異点とする。x の近傍で、

$$R = \{ u = f(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n) \}$$

となる。x を原点とする正準座標を固定する。このとき、

$$\pi = df - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - p_i \right) dx_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i \right\}$$

であり、$\pi_x = 0$ かつ、x は座標の原点であるから、

$$f(x) = 0 \quad \& \quad (df)_x = 0$$

となる。従って、$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_x, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right)_x, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial p_n}\right)_x \right\}$ は $(T_x(R), \langle\, , \rangle)$ の symplectic 基底となる。さらに、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\pi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = h_\pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle H_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle 。$$

同様にして、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_j}(x) = \left\langle H_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), \frac{\partial}{\partial p_j} \right\rangle \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(x) = \left\langle H_x\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right), \frac{\partial}{\partial p_j} \right\rangle$$

を得る。よって、$H_x : T_x(R) \to T_x(R)$ の標準形に応じて、f の x での 2-jet が定まる。

例として、$H_x : T_x(R) \to T_x(R)$ が、2つの実固有値 λ, $1-\lambda$ のみを持ち、それぞれただ1つの Jordan 細胞を持つ場合（i.e., $T_x(R) = E_{\lambda,j}$ で (1) の型の標準形を持つ場合）に、f の 2-jet を求めてみよう。この場合、$\{v_1, \cdots, v_n, w_n, \cdots, (-1)^{n-s} w_s, \cdots, (-1)^n w_1\}$ が symplectic 基底になっているから、$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $(-1)^{n-i} w_i = \frac{\partial}{\partial p_{n-i+1}}$ とおいて、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \langle H_x(v_i), v_j \rangle = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(x) = 0 , \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_j}(x) = \langle H_x(v_i), (-1)^{j-1} w_{n-j+1} \rangle = \lambda \delta_{ij} + \delta_{i-1,j} \end{cases}$$

を得る。従って、f の x での 2-jet は

$$(1) \qquad \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$$

となる。同様にして、他の *Hessian* の標準形より得られる f の標準形は、次の通り。

$$(2)\quad a\sum_{i=1}^{n}(x_i p_i + x_i' p_i') + b\sum_{i=1}^{n}(x_i' p_i - x_i p_i') + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i p_{i+1} + x_i' p_{i+1}')$$

$$(3)\quad (-1)^{m+1}(p_m^2 + p_m'^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(x_i p_i + x_i' p_i') + \mu\sum_{i=1}^{m}(x_i' p_i - x_i p_i') + \sum_{i=1}^{m-1}(x_i p_{i+1} + x_i' p_{i+1}')$$

$$(4)\quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1} \pm \mu\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(x_i x_{n-i+1} - p_i p_{n-i+1})$$

$$(5)\quad \text{a)}\quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$$

$$\text{b)}\quad \pm(-1)^{n+1} p_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_{i+1}$$

一般の場合、f の標準形は、上記 (1)〜(5) の適当な和で書ける。例を少し上げておく。$H_x : T_x(R) \to T_x(R)$

(i) $H_x = 0$ の場合　　$f = 0$

(ii) H_x の固有値が、すべて実で相異なり、$\frac{1}{2}$ を含まない。

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i p_i$$

(iii) H_x の固有値が、すべて相異なり、$\mathrm{Re}\,\lambda = \frac{1}{2}$ & $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$。

$$f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \mu_i \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + p_i^2)$$

我々の、次の課題は、正準座標をさらに、取りかえて、f をいつ、*Hessian* の定める 2 次の標準形に、移せるかである。

（この部分は、いわば、函数の特異点で、非退化の仮定の下に、*Morse* の *Lemma* を示す部分に、対応している。）

4. 局所接触同値性と局所可解性

この節では、それぞれ特異点 x_1, x_2 を持つ単独方程式

R_1, R_2 に対して，R_1 を R_2 に移し，$\varphi(x_1)=x_2$ となる局所接触変換 φ の存在問題は，いわば φ の graph が満たすべき，特異点を持つ単独方程式の，特異点での局所可解性に帰着されることを見る。

まず，局所接触同値性より準備する。

$$\begin{array}{ccc} J^1(M,\mathbb{R}) & \longrightarrow & T^*(M)\times\mathbb{R} \\ \downarrow & & \\ j^1_z(h) & \longmapsto & ((dh)_z,\ h(z)) \end{array}$$

は，微分同型である。この同一視の下，$J^1(M,\mathbb{R})$ の $T^*(M)$ への射影を ϖ とする。また，$J^1(M,\mathbb{R})$ の微分同型 φ が $\varphi^*\hat{\pi}=\hat{\pi}$ を満たすとき，$\hat{\pi}$-diffeo. と呼ぶ（φ が $\varphi^*\hat{\pi}=f\cdot\hat{\pi}$ $\exists f\in C^\infty(J^1(M,\mathbb{R}))$ を満たすとき，接触変換であった）。$J^1(M,\mathbb{R})$ の部分多様体 R_1, R_2 とその上の点 x_1, x_2 に対して，(R_1, x_1) と (R_2, x_2) が局所 $\hat{\pi}$-同値であるとは，$\varphi(x_1)=x_2$ なる局所 $\hat{\pi}$-diffeo. で $\varphi(R_1)=R_2$ (locally) を満たすものが存在するときにいう。我々の出発点は次の命題である。

命題 2（[L] Chap 2 §1 p.130）

$J^1(M,\mathbb{R})$ の超曲面 R_1, R_2 が $x_1\in R_1$, $x_2\in R_2$ で，

$$\varpi_* : T_{x_i}(R_i) \longrightarrow T_{\varpi(x_i)}(T^*(M)) : \text{linear iso} \quad (i=1,2)$$

を満たしているとする。このとき次は同値である。

(i) (R_1, x_1) と (R_2, x_2) は局所 $\hat{\pi}$-同値である。

(ii) $\exists\,\varphi : R_1 \to R_2$: 局所微分同型で $\varphi(x_1)=x_2$ & $\varphi^*\pi_2=\pi_1$

を満たす。ここに、$\pi_i = \hat{\pi}|_{R_i}$ $(i=1,2)$。

(i) ⇒ (ii) は、明白である。(ii) ⇒ (i) は、概ね次のように示される。条件より、ϖ は R_i と $T^*(M)$ の局所微分同型である。このとき、φ は $T^*(M)$ の正準変換 ψ を導く。$T^*(M)$ の正準変換は、局所的には、0-jet の値の定数倍を除いて、$J^1(M,\mathbb{R})$ の $\hat{\pi}$-diffeo に一意的に持ち上がる。従って、ψ は $\psi(x_1)=x_2$ なる局所 $\hat{\pi}$-diffeo $\hat{\psi}$ を一意的に定める。後は、$\hat{\psi}|_{R_1} = \varphi$ をいえばよい。

特に、x が単独方程式 R の特異点である場合、x は命題2の仮定を満たしている。従って、特異点の近傍での単独方程式の局所接触同値性をいうには、π を保つ R の局所微分同型を与えればよい。

次に、局所同値性が局所可解性に帰着される方程式を与えよう。直積空間 $M \times M$ の第1成分への射影を p_1、第2成分への射影を p_2 とする。次の submersion を考える：

$$\nu : J^1(M,\mathbb{R}) \times J^1(M,\mathbb{R}) \longrightarrow J^1(M \times M; \mathbb{R})$$
$$(j^1_{z_1}(f),\ j^1_{z_2}(g)) \longmapsto j^1_{(z_1,z_2)}(p_1^* f - p_2^* g)$$

座標で書けば、$((x,u,p),(x',u',p')) \longmapsto (x,x',u-u',p,-p')$ である。

R_1, R_2 を $J^1(M,\mathbb{R})$ の超曲面（単独方程式）とし、x_1, x_2 をそれぞれの方程式の特異点とする。ν の $R_1 \times R_2 \subset J^1(M,\mathbb{R}) \times J^1(M,\mathbb{R})$

への制限を考えると，

$$\nu : R_1 \times R_2 \longrightarrow J^1(M\times M, \mathbb{R})$$

は，(x_1, x_2) の近傍で *immersion* となる。座標で書けば，

$((x, f(x,p), p), (x', f'(x', p'), p')) \longmapsto (x, x', f-f', p, -p')$ である。

よって，$\hat{R} = \nu(R_1 \times R_2) \subset J^1(M\times M, \mathbb{R})$ は，$J^1(M\times M, \mathbb{R})$ の単独方程式となり，(x_1, x_2) は $\hat{R}$ の特異点である。

次の命題を示そう。

命題 3 ([L] Chap. IV §1 p 151)

R_1, R_2 を $J^1(M, \mathbb{R})$ の単独方程式とし，x_1, x_2 をそれぞれの方程式の特異点とする。このとき，次は同値である。

(i) (R_1, x_1) と (R_2, x_2) は，局所$\mathcal{C}$-同値である。

(ii) $\hat{R} = \nu(R_1 \times R_2)$ の局所解 (*Legendre* 部分多様体) S で (x_1, x_2) を通り

(※) $(g_i)_* : T_{(x_1, x_2)}(S) \longrightarrow T_{x_i}(R_i)$: *linear iso.* $(i=1,2)$

を満たすものが存在する。ここに，$g_i : R_1 \times R_2 \to R_i$: 射影である。

(i) ⇒ (ii) $J^1(M\times M, \mathbb{R})$ 上の *canonical contact form* の $\hat{R}$ への制限を θ とすると，ν の定義より

$$\theta = d(f-f') - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + \sum_{i=1}^{n} p'_i dx'_i = \pi_1 - \pi_2$$

となる。従って，$\varphi : R_1 \to R_2$: 局所微分同型 $(\varphi(x_1) = x_2)$ に付

して、φ の graph $\{(x,\varphi(x))\}=\Gamma$ は、$R_1\times R_2$ の部分多様体であるが、　$\varphi^*\pi_2=\pi_1 \iff \nu(\Gamma)$: Legendre 部分多様体

となる。

(ii) ⇒ (i)　条件(※)より、S は (x_1,x_2) の近傍で、$\exists^1\varphi : R_1\to R_2$ 局所微分同型 ($\varphi(x_1)=x_2$) の graph となるから 上記より、φ は、$\varphi^*\pi_2=\pi_1$ を満たす。

最後に、$\hat{R}$ において、$\hat{x}=(x_1,x_2)$ を通る解 S が存在するための条件を考えよう。特に Legendre 部分空間 $T_{\hat{x}}(S)$ の満たすべき性質を考察する。$\hat{x}$ は $\hat{R}$ の特異点であるから、$T_{\hat{x}}(\hat{R})=C(\hat{x})$ であり、$(T_{\hat{x}}(\hat{R}),d\theta)$ は、symplectic ベクトル空間である。$T_{\hat{x}}(\hat{R})$ を $T_{x_1}(R_1)$ と $T_{x_2}(R_2)$ の直和と同一視するとき、$\theta=\pi_1-\pi_2$ より、$T_{\hat{x}}(\hat{R})$ は、symplectic ベクトル空間の直和

$$(T_{\hat{x}}(\hat{R}),d\theta)=(T_{x_1}(R_1),d\pi_1)\oplus(T_{x_2}(R_2),-d\pi_2)$$

となる。すなわち $\langle v_1+v_2,w_1+w_2\rangle=\langle v_1,w_1\rangle_1-\langle v_2,w_2\rangle_2$, $v_i,w_i\in T_{x_i}(R_i)$ $(i=1,2)$ である。よって、Hessian は、$h_\theta=h_{\pi_1}-h_{\pi_2}$ であるが、上の直和の下、$H_{\hat{x}}=H_{x_1}\oplus H_{x_2}$ となる。

このとき、$T_{\hat{x}}(\hat{R})$ の Legendre 部分空間 L に対して、

$$h_\theta|_L=0 \iff L : H_{\hat{x}}\text{-不変}$$

である。また、$A : T_{x_1}(R_1)\to T_{x_2}(R_2)$: linear iso. に対して、$L=\{v+Av\in T_{\hat{x}}(\hat{R})\mid v\in T_{x_1}(R_1)\}$ なる $T_{\hat{x}}(\hat{R})$ の部分空間を考えると、

$$L: \text{Legendre}\text{部分空間} \Longleftrightarrow A: \text{symplectic}\text{同型}$$

が成立する。さらに、このLが $H_{\hat{x}}$-不変なるとき、Aは

$$A \cdot H_{x_1} = H_{x_2} \cdot A$$

を満たしている。従って、次を得た。

補題4（[L] Chap IV §2 p153）

(1) $\hat{x}$ を通る解 S で(※)を満たすものが存在すると、$L = T_{\hat{x}}(S)$ は $T_{\hat{x}}(\hat{R})$ の $H_{\hat{x}}$-不変 Legendre 部分空間であり、H_{x_1} と H_{x_2} は symplectic 同値となる。さらに、$\hat{A} \cdot H_{x_1} = H_{\hat{x}}|_L \cdot \hat{A}$ より、$H_{\hat{x}}|_L$ の Jordan 標準形は H_{x_1} のそれと一致する。ここに、$\hat{A}(v) = v + A(v) \in L$, $v \in T_{x_1}(R_1)$。

(2) 逆に、H_{x_1} と H_{x_2} が symplectic 同値（i.e., $\exists A: T_{x_1}(R_1) \to T_{x_2}(R_2)$; symplectic 同型 s.t. $A \cdot H_{x_1} = H_{x_2} \cdot A$）なるとき、

$$L = \{ v + Av \mid v \in T_{x_1}(R_1) \} \subset T_{\hat{x}}(\hat{R})$$

は、$H_{\hat{x}}$-不変 Legendre 部分空間である。

すなわち、$\hat{x} = (x_1, x_2)$ を通る $\hat{R}$ の解 S で(※)を満たすものの存在には、H_{x_1} と H_{x_2} が symplectic 同値なることが、必要条件であり、そうであるとき、(2)の L は、解の $\hat{x}$ での初期条件を与えている。

5. $\hat{R}$ の特異点における局所可解性

この節では、4.で得た単独方程式$\hat{R}$の特異点での局所可解性についての結果を述べる。証明は、それぞれの文献をあたられたい。

存在定理は、考える範疇によって様相が異なる。まず、形式巾級数解について、次がある。これは、3.における座標を適当に取り直して、解の3次以上の*Taylor*展開の係数を見て行けばよい。

定理5（[L] Chap IV §2 p156）

Rを$J^1(M,\mathbb{R})$の単独方程式として、xをその特異点とする。$T_x(R)$のH_x-不変*Legendre*部分空間Lに対して、$H_x|_L$の固有値$\{\lambda_i\}$が、

$$(*)\qquad \sum_i m_i\lambda_i \neq 1 \qquad \text{for } \forall m_i \in \{0,1,2,\cdots\} \text{ s.t. } \sum_i m_i \geqq 3$$

を満たす時、形式解Sで、$T_x(S)=L$なるものが、唯一つ存在する。

C^∞-解について、次がある。証明には、ベクトル場の特異点における標準形についての*K.T. Cheng*の結果が用いられる。

定理6（[L] Chap V §1 p169）

Rを$J^1(M,\mathbb{R})$の単独方程式として、xをその特異点とする。$T_x(R)$のH_x-不変*Legendre*部分空間Lに対して、$H_x|_L$の固有値が$(*)$を満たす時、C^∞-解Sで、$T_x(S)=L$なるものが存在する。

我々が求めるのは、方程式の退化した点での解であるから、定理5は、解析的解の存在(収束性)を意味しない。複素解析的範疇での解の収束性については、次の preprint を参照されたい:

S. M. Webster: A normal form for a singular first order partial differential equation. University of Minesota Mathematics Report 85-114

上記定理と、命題3、補題4とを組み合わせると、単独方程式 R とその特異点 x に対して、Hessian H_x の固有値が(*)を満たせば、R は $\mathcal{C}$-diffeo. で、3. で考察した標準形に、移ることがわかる。また、命題1により、包合系 R は、特異点 x において、H_x の固有値が(*)を満たせば、接触変換によって、標準形に移ることが結論される。